9.0 引言

• 現在我們有一個 n 有限的樣本

觀察。

• 它具有平均值以及

標準偏差 s，計算公式為

這 n 個觀察結果。

•我們可以估計人口嗎？

統計數據，例如，人口

平均值 ，使用包含的資訊

在這個n個觀測值的樣本中？

x

方法 1 - 點

估計

• 使用樣本資料計算單個

用於估計參數的數位

利息。也就是說，使用樣本均值

估計總體均值 。

• 問題很明顯 – 兩個樣本

可能會給出非常不同的平均值。（不確定性

涉及。

• 它不提供任何有關

樣品的固有變異性

意味著，也沒有關於樣本量。

x

方法 2 – 間隔

估計

• 提供一系列合理的數值

旨在包含

感興趣的參數 – 總體

均值  在本例中，具有

置信度。

• 這個範圍稱為置信度

間隔，或 CI。

• 「我相信人口意味著

 應包括在此間隔內。“

• 從之前的講座中，我們瞭解到

均值的抽樣分佈是

正態分佈。

• 給定一個隨機變數，表示

許多 樣本 均值，並且總體具有

平均值  和標準差 ，我們知道

以下轉換導致

Z 的標準正態分佈：

x

n

x

跟

/





請注意，使用的隨機變數

這是採樣手段。每

樣本由n個個體組成，

具有總體平均值  和

總體標準差  .

9.1 雙面置信

x 的間隔

這給出了 0.9750 的概率

z = -inf 到 1.96，基於標準

正態分佈。

• 我們知道95%的樣本意味著，在

轉換為 Z，將位於 Z=-1.96 到

Z=1.96。那是：

（ 1.96 1.96 ） 0.95

（ 1.96 1.96 ） 0.95

（ 1.96 1.96 ） 0.95

（ 1.96 1.96 ） 0.95

1.96) 0.95

/

( 1.96

（ 1.96 1.96） 0.95

    

    

     

    

    

   

n

x

n

P x

n

x

n

P x

x

n

x

n

P

n

x

n

P

n

x

P

P Z



 



 



 



 





這

數量在

紅色方框

是

邊界

對於95%

信心

間隔。

95% 置信區間

• 人口平均的95%邊界;我們是

95% 的置信度，區間將包含 。

• 這並不是說  是一個隨機變數

在 95% 的時間間隔內取一個值。

• 這並不是說95%的人口

平均值位於這些邊界之間。

（ 1.96 ， 1.96 ）

n

x

n

x    

95% 置信區間

• 這意味著如果我們要隨機選擇100

從總體中抽樣並使用這些樣本

樣本計算 100 種不同的 置信度

的間隔，大約 95 的

區間將覆蓋真實總體

mean  和 5 不會。

（ 1.96 ， 1.96 ）

n

x

n

x    

z=1.96 z=+1.96

95%

95% 置信區間

= 0.05

Z/2 = 1.96

99% 置信區間

• 也就是說，Z 從 -2.58 到 2.58 覆蓋

標準曲線下面積的 99%

正態分佈。

（ 2.58 ， 2.58 ）

n

x

n

x    

z=2.58 z=+2.58

99%

99% 置信區間

= 0.01

Z/2 = 2.58

示例 1

• 考慮血清的分佈

美國所有男性的膽固醇水準

患有高血壓和吸煙者。

• 分佈近似正態

具有未知均值  和標準

偏差 =46毫克/100毫升

• 我們有興趣估計平均值

該人群的血清膽固醇水準。

範例 1（續）

• 在我們出去之前，隨機選擇一個

樣本，此區間的概率

覆蓋真實總體均值  為 0.95。

• 取 n=12 並假設均值

從這12個個體計算的價值

是 217。

（ 1.96 ， 1.96 ）

n

x

n

x    

範例 1（續）

我們可以計算這個間隔：

(191, 243)

(217 26.027, 217 26.027)

)

12

46

, 217 1.96

12

46

(217 1.96

（ 1.96 ， 1.96 ）

 

 

 

n

x

n

x  

因此，95% 置信區間為 （191， 243）。

範例 1（續）

• 這是什麼意思？

• 而 217（計算平均值來自

這12個人）是我們最好的猜測

來自總體的平均值，

間隔 191 到 243 提供的範圍

人口的合理值

平均值 。

• 我們 95% 確信極限 191

和 243 覆蓋了真正的均值 。

範例 1（續）

• 我們不說有95%

位於這些之間的幾率

值;  是固定的，要麼介於

191和243或它不是。

100個隨機樣本的數值類比

的 n=12 來自此總體。每個樣品

為自己的 CI 計算，所有這些 CI 都是

長度相同。 事實上 ，只有5個

他們不包括實際人口

平均值 211（水平線）。

範例 1（續）

示例 1 – 續

• 請注意，95%的置信區間涵蓋從191到

243，或範圍寬度為52。

• 而不是95%的置信區間，我們可能會得到99%

通過將 Z=1.96 更改為 2.58 來表示 CI。

• 這給出了 （183， 251） 或寬度

範圍更廣 68.

合理的是，當CI變寬時，在

至少會有一些（藍色箭頭）的5

以前排除人口的 CI

平均值 211 現在覆蓋了該平均值。

看起來一個（紅色箭頭）不包含 211

即使CI範圍更寬，為68。

示例 2

• 在範例 1 中，長度為 99% CI

區間大於95%置信區間，從

52 至 68。

• 當 CI 的長度變大時

置信水準 Z 變大。

• 事實上，當 CI 的長度在以下情況下會變窄

 變小或 n 變大。

( , )

n

x Z

n

x Z    Z=1.96 表示 95% 置信區間

Z=2.58 表示 99% 置信區間

示例 2 – 續

• 樣本量有多大

將 99% CI 的長度減少到只有 20？

• 回想一下，間隔以 217 為中心。

所以 下限將是217-10=207

上限為 217+10=227。

（217 2.58 46 ， 217 2.58 46 ）

n n

 

2.58 46 ~10

n

或這得到 n =140.8

關於信心的說明

間隔

• 口譯

– 人口的可能值

具有高置信度的平均μ

• 所有 CI 都是 95% 嗎？

– 否

– 它是最常用的

– 99% 的置信區間更寬

– 90% 置信區間較窄

續

• 隨機抽樣誤差

– 置信區間僅考慮

隨機抽樣誤差 - 不是其他

錯誤或偏差的系統性來源

• 系統性偏差示例

– 血壓 （BP） 測量值為

總是+5太高（儀器壞了）

– 只有BP高的人同意參加

（無回應偏差）

CI更是好是壞？

• 更寬的間隔意味著存在

樣本均值之間的差異較大。

• 這可能是由於更大 ，更小

樣本大小 n，或要使用的較大 Z。

( , )

n

x Z

n

x Z   

續

• 這帶來了不確定性，即

樣本足夠好，可以表示

人口 均值。

• 然而，為了獲得可靠的樣品，我們

渴望高度的信心。（對於

例如，我們想要95%而不是90%。

• 這導致更廣泛的CI（不確定性）。

• 補償間隔的擴大，

我們需要增加n，如果人口

變化不容忽視。

示例 3

• 血壓

n = 100， x = 125 mm 汞柱，  = 14

• 我們知道 CI 被定義為：

• 因此，我們首先計算

1.4

100

 14 

n



回想一下，這是示例均值。

( , )

n

x Z

n

x Z   

示例 3 – 續

 的 95% 置信區間 （平均血壓在

人口）使用 Z=1.96。 因此 ，CI

成為：

125 ± 1.96 ~1.4

或

125 ± 2.744

這是

查找我的人口

意味著。

( , )

n

x Z

n

x Z   

編寫方法

置信區間

• 122.2 至 127.8 （長度 = 5.6）

• （122.2， 127.8）

• 122.2–127.8

• x 上的 95% 誤差邊界為 2.8

（122.2 到 127.8，而不是 122.2 減去 127.8）

平均值為 125。變化是

2.8mm，或 2.8/125= 2.24%，在

置信水準為95%。

基本假設

對於95%置信區間

• 為了能夠使用公式

資料必須滿足以下幾個條件：

滿足必要的基本假設

以使用此結果

• 假設：

– 隨機抽樣人口 — 重要！

– 觀察結果與樣本無關

– 樣本量n至少為30~60（我們將

稍後解釋）[中心極限定理需要大n！

（ 1.96 ， 1.96 ）

n

x

n

x    

t 校正

• 如果樣本量小於 30

– 均值的抽樣分佈不完全

正態分佈

– 相反，它近似於“t分佈”（它

我們將在後面的講座中討論）

– 需要一個小的修正 — 稱為 t-

校正

– 即，以下公式中的數位 1.96

需要稍微大一點（要達到同樣的效果）

95% 置信水準 ）

（ 1.96 ， 1.96 ）

n

x

n

x    

雙面與單面置信區間？

• 也稱為雙尾或單尾

（因為“尾巴”在鐘形

分佈）

• 這取決於是否只有一個方向

被認為是極端的（不太可能的）或

兩個方向都被認為是極端的。

9.2 單面

置信區間

• 在某些情況下，我們關注

無論是 的上限還是下限，

但不是兩者兼而有之。（只有一個方向是

被認為是「極端」或“不太可能”。

• 在這種情況下，我們只考慮片面的

而不是雙面 CI。

• 回想一下，在雙面的情況下，我們有Z-

值介於 1.96 和 +1.96 之間以覆蓋

標準正態分佈為95%。

續

• 對於單面，我們考慮 {， 1.96}

或 {1.96， } 正常。這將涵蓋，

顯然，超過95%。（事實上，97.5%）

• 僅覆蓋 95%，此 Z 值（絕對值

值）應更小。

z=1.96

z=+1.96

95%

案例

左尾

• 此問題

翻譯成：

– z 的值是多少

P（Z  z） = 0.95， 對於 a

標準正態分佈。

–  答案 = 1.645

>> F='1/（sqrt（2\*pi））\*exp（-0.5\*z^2）';

>> z=？

>> int（F，z，inf）

年 =.95

>>

左側顯示的文字不是實際的

MATLAB 命令。我們需要什麼

知道是“z的值會給

積分結果為 0.95”

95%

z=1.645

z=1.96

示例 #4

• 考慮血紅蛋白（血）的分佈

<6歲美國兒童的紅素）水準

誰已經暴露於高水準的

導聯（鉛）（因此血紅蛋白較低）

級別）。“低”是不好的!!!

• 此分佈的均值未知

值  和  = 0.85 克/100 毫升。

• 我們有興趣瞭解上部

已綁定 到 。（這樣，如果你的血紅蛋白

級別低於此值，您可能

鉛中毒。

續

• 回想一下，Z 變換

轉換採樣分佈

成標準正態分佈是

n

X

跟

 /





請注意，我們正在轉換“採樣分佈”

（這就是為什麼我們在這裡有樣本量n），而不是

隨機變數 X 的「概率分佈」。

• 實際 人口均值  可以涵蓋

最多到

10.6 0.163 10.763

74

0.85

10.6 1.645

  

 

95%

z=1.645

我們知道從

早期的嘗試

Z=1.645 可以是

用於給予這個

概率為 0.95。

血紅素標準正態分佈

74名暴露於高水平的兒童的水準

潛在客戶的水準。此示例平均值為 10.6 （X=10.6） 和

知道  = 0.85。

續

• 它顯示，雖然這個採樣結果（從

74個孩子）給出的平均值為10.6，

實際均值可能高達 10.763（我們

95%有信心做到這一點

語句）。

• 如果我們要選擇100個隨機樣本

大小 n=74，並使用每個大小來構造

單側 95% 置信區間，其中約 95 個

CI 將包含真實均值  （儘管

我們真的不知道這意味著什麼

可能是）。

備註

• 我們可以從74計算平均值

暴露於高額的兒童

潛在客戶級別，並得到 10.6 的值。[這

在前面被稱為“點估計”。

• 有了這個，我們可以說一個孩子的血紅蛋白

10.5級中毒（低於

預期），而 10.7 的一個則不然。

• 從這裡對CI進行片面估計

n=74 樣本，另一方面，我們將

認為兩個孩子都中毒了。

MATLAB normpdf

• NORMPDF 正態概率密度函數 （pdf）.

• Y = NORMPDF（X，MU，SIGMA） 傳回

平均 MU 和標準的正態分佈

偏差 SIGMA，以 X 中的值進行評估。

• Y 的大小是輸入的常見大小

參數。 標量輸入作為常量起作用

與其他輸入大小相同的矩陣。

• MU 和 SIGMA 的預設值為 0 和 1

分別。（這是一個標準的正態分佈。

>> x=[-4：0.1：4];

>> y=normpdf（x）;

>>圖（x，y）

標準正態分佈（預設

MU=0， 西格瑪=1）

>> x=[69：189];

>> y=normpdf（x， 129， 19.8）;

>>圖（x，y）

取 MU=129 的正態分佈，

西格瑪=19.8）

MATLAB normcdf

• 正態累積分佈

函數 （cdf）。

• P = NORMCDF（X，MU，SIGMA） 傳回

平均 MU 和標準的正態分佈

偏差 SIGMA，以 X 中的值進行評估。

• P 的大小是 X、MU 和

西格馬。 標量輸入用作常量矩陣

與其他輸入的大小相同。

• MU 和 SIGMA 的預設值為 0 和 1，

分別。

面積下

曲線 =

normcdf（X）

【累計

從最左邊】

X

標準正態分佈（預設

MU=0， 西格瑪=1）

>> 標準cdf（-1）

年 =

0.1587

>>標準（1）

年 =

面積小於0.8413

曲線 =

normcdf（-1）

= 0.1587

標準正態分佈（預設

MU=0， 西格瑪=1）

>>標準（-2）

年 =

0.0228

>>標準（2）

年 =

0.9772

面積下

曲線 =

標準cdf（-2）

= 0.0228

標準正態分佈（預設

MU=0， 西格瑪=1）

>> 標準cdf（-3）

年 =

0.0013

>>標準（3）

年 =

0.9987

>>

面積下

曲線 =

標準cdf（-3）

= 0.0013

標準正態分佈（預設

MU=0， 西格瑪=1）

會是什麼

答案

normcdf（0）？

面積下

曲線

標準正態分佈（預設

MU=0， 西格瑪=1）

>> 1-標準cdf（1）

年 =

0.1587

曲線下的面積 =

標準cdf（100， 129，

19.8） = 0.0715

>> 標準cdf（100， 129， 19.8）

年 =

0.0715

正態分佈（採取

MU=129，西格瑪=19.8）

會是什麼

normcdf（129，

129, 19.8)?

正態分佈（採取

MU=129，西格瑪=19.8）

MATLAB norminv

• 諾明威逆正常累積

分佈函數 （cdf）。

• X = NORMINV（P，MU，SIGMA） 傳回逆 cdf

對於均值 MU 的正態分佈，並且

標準偏差 SIGMA，以

P.

• X 的大小是輸入的常見大小

參數。 標量輸入作為常量起作用

與其他輸入大小相同的矩陣。

• MU 和 SIGMA 的預設值為 0 和 1，

分別。

x=norminv（P） 給出一個

左尾 x

曲線下的面積為P。

x

標準正態分佈（預設

MU=0， 西格瑪=1）

>>規範（0.2）

年 =

-0.8416

x=-0.8416

給予面積

曲線下

= 0.2

x

>>諾敏（0.05）

年 =

-1.6449

>>

x

x=-1.6449

給予面積

曲線下

= 0.05

>>規範（0.025）

年 =

-1.9600

>>

x

x=-1.9600

給予面積

曲線下

= 0.025

x

答案是什麼

對於 norminv（0.5）？

示例 5

• 我們有 2 個正態分佈 – 一個

血壓正常的人，

和另一個高血壓

並同時服藥。

• 兩個分佈具有不同 的 和

 （下一張幻燈片）。

• 我們的目標是知道一個人是否有

血壓正常或正在服用

降壓藥，僅在

閱讀血壓的基礎。

=80.7， =9.2

=94.9， =11.5

10%

讓我們找到「藥物」的下半部分

組並找到此血壓讀數。

低於此標記，一個人不太可能

在藥物治療下。

=80.7， =9.2

=94.9， =11.5

10%

>> 規範（0.1， 94.9， 11.5）

年 = 80.1622

>>

=80.7， =9.2

=94.9， =11.5

10%

80.1622

但是，使用此標記80.1622將

錯誤地識別正常人的“很大一部分”

作為服用藥物的人（淺灰色區域）。如何

這部分很大嗎？

=80.7， =9.2

=94.9， =11.5

10%

區域淺灰色：

>> 1-標準cdf（年， 80.7， 9.2）

年 = 0.5233

年=80.1622

從上一張幻燈片

80.1622

• 請注意，範例 5 旨在

說明 normcdf（） 和 norminv（）。

• 它與CI無關

擬在本講座中 介紹。

（請參見沒有樣本大小 n

參與~~~）

示例 6

•電梯的重量限制為12人

每個重167磅。

• 男性的體重通常為

平均172磅

和29磅的標準偏差。

• Q1：一個人體重超過的概率

167磅？

• Q2：平均體重的概率

從12名男性的隨機樣本中

167磅？

>> X=72：272;

>> Y=normpdf（X，172，29）;

>>圖（X，Y）

>>

面積下

曲線？

面積下

曲線？

> 1-標準cdf（167， 172， 29）

年 = 0.5684

>>

167

對於 Q2：正態分佈

平均值 = 172 且 STD = 29/sqrt（12）

面積下

綠色曲線？

>> 1-範數（167， 172，

29/平方尺（12））

年 = 0.7248

>>

167